

**Libris**.RO

Respect pentru oameni și cărți

ALINA PARASCHIVA  
SILVIU DĂNEȚ

# **matematică**

## **Formule și**

## **noțiuni generale**

**clasele**

**V-VIII**

Ediția a II-a

**CORINT**

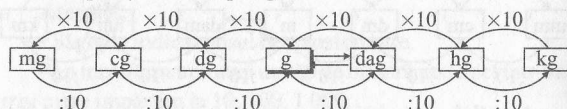
### Atenție!

- La transformarea unei unități de măsură mai mici într-una mai mare împărțim la 10, 100, 1 000, ...
- La transformarea unei unități de măsură mai mari într-una mai mică înmulțim cu 10, 100, 1 000, ...

## 4. Unități de măsură pentru masă

Unitatea de măsură, internațional recunoscută, pentru masă este **gramul**, simbolizat **g**.

Multiplii și submultiplii gramului sunt:



### Atenție!

- Unitățile de măsură cresc/descresc din 10 în 10.
- Sunt des folosite: quintalul (q),  $1 \text{ q} = 100 \text{ kg}$ ;  
tona (t),  $1 \text{ t} = 10 \text{ q} = 1\,000 \text{ kg}$ .

## 5. Unități de măsură pentru timp

Unitatea de măsură, internațional recunoscută, pentru timp este **secunda**, simbolizată **s**.

Alte unități des folosite: minutul (min),  $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$ ;  
ora (h),  $1 \text{ h} = 60 \text{ min}$ ;  
ziua (d),  $1 \text{ d} = 24 \text{ h}$ .

## Cuprins

|               |   |
|---------------|---|
| Prefață ..... | 3 |
|---------------|---|

### ALGEBRĂ

|                                                                   |           |
|-------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>I. Mulțimea numerelor naturale .....</b>                       | <b>5</b>  |
| 1. Operații cu numere naturale .....                              | 5         |
| 2. Compararea și ordonarea numerelor naturale .....               | 7         |
| 3. Factor comun .....                                             | 7         |
| 4. Puterea unui număr natural .....                               | 8         |
| 5. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor ..... | 9         |
| 6. Descompunerea numerelor naturale (în baza 10) ...              | 10        |
| 7. Divizibilitatea .....                                          | 10        |
| <b>II. Propoziții și mulțimi .....</b>                            | <b>13</b> |
| 1. Propoziții .....                                               | 13        |
| 2. Mulțimi .....                                                  | 14        |
| <b>III. Mulțimea numerelor întregi .....</b>                      | <b>16</b> |
| 1. Noțiuni generale .....                                         | 16        |
| 2. Operații cu numere întregi .....                               | 17        |
| <b>IV. Mulțimea numerelor raționale .....</b>                     | <b>19</b> |
| 1. Noțiuni generale. Frații .....                                 | 19        |
| 2. Amplificarea și simplificarea fracțiilor .....                 | 20        |
| 3. Aducerea fracțiilor la același numitor .....                   | 20        |
| 4. Opusul unei fracții .....                                      | 21        |
| 5. Operații cu fracții .....                                      | 21        |
| 6. Frații ordinare și fracții zecimale .....                      | 23        |
| <b>V. Mulțimea numerelor reale .....</b>                          | <b>25</b> |
| 1. Noțiuni generale .....                                         | 25        |
| 2. Radicali .....                                                 | 25        |
| 3. Intervale de numere reale .....                                | 26        |

|                                                                                      |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 4. Rapoarte, procente și proporții .....                                             | 27        |
| 5. Medii .....                                                                       | 30        |
| 6. Mărimi proporționale .....                                                        | 31        |
| 7. Calcul algebric .....                                                             | 34        |
| <b>VI. Ecuații .....</b>                                                             | <b>37</b> |
| 1. Ecuația de gradul întâi cu o necunoscută .....                                    | 37        |
| 2. Ecuația de gradul al doilea cu o necunoscută .....                                | 37        |
| <b>VII. Inecuația de gradul întâi cu o necunoscută .....</b>                         | <b>39</b> |
| 1. Noțiuni generale .....                                                            | 39        |
| 2. Rezolvarea inecuațiilor .....                                                     | 39        |
| <b>VIII. Ecuații și sisteme de ecuații de gradul întâi cu două necunoscute .....</b> | <b>40</b> |
| 1. Ecuații de gradul întâi cu două necunoscute .....                                 | 40        |
| 2. Sisteme de ecuații de gradul întâi cu două necunoscute .....                      | 40        |
| <b>IX. Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuațiilor .....</b>                       | <b>44</b> |
| <b>X. Funcții .....</b>                                                              | <b>45</b> |
| 1. Noțiuni generale .....                                                            | 45        |
| 2. Funcția liniară .....                                                             | 45        |

## GEOMETRIE

|                                       |           |
|---------------------------------------|-----------|
| <b>I. Unghiul .....</b>               | <b>51</b> |
| 1. Noțiuni generale .....             | 51        |
| 2. Clasificarea unghiurilor .....     | 52        |
| <b>II. Triunghiul .....</b>           | <b>56</b> |
| 1. Noțiuni generale .....             | 56        |
| 2. Construcția triunghiurilor .....   | 56        |
| 3. Clasificarea triunghiurilor .....  | 58        |
| 4. Linii importante în triunghi ..... | 59        |

|                                                                                        |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5. Proprietăți ale triunghiurilor .....                                                | 61         |
| 6. Congruența și asemănarea triunghiurilor .....                                       | 65         |
| 7. Rezultate importante în asemănarea triunghiurilor .....                             | 69         |
| 8. Teoreme importante în triunghiuri oarecare .....                                    | 70         |
| 9. Teoreme importante în triunghiuri dreptunghice .....                                | 73         |
| 10. Rapoarte constante în triunghiurile dreptunghice (elemente de trigonometrie) ..... | 75         |
| 11. Valori particulare ale funcțiilor trigonometrice .....                             | 76         |
| 12. Formule pentru aria triunghiului .....                                             | 76         |
| <b>III. Patrulater .....</b>                                                           | <b>79</b>  |
| 1. Noțiuni generale .....                                                              | 79         |
| 2. Paralelogramul .....                                                                | 79         |
| 3. Trapezul .....                                                                      | 83         |
| 4. Perimetrul și aria patrulaterelor studiate .....                                    | 84         |
| <b>IV. Linia mijlocie în triunghi și trapez .....</b>                                  | <b>86</b>  |
| <b>V. Cercul .....</b>                                                                 | <b>88</b>  |
| 1. Noțiuni generale .....                                                              | 88         |
| 2. Poziții relative ale unei drepte față de un cerc .....                              | 89         |
| 3. Poziții relative a două cercuri .....                                               | 90         |
| 4. Unghiuri construite relativ la cerc .....                                           | 92         |
| 5. Teoreme referitoare la arce și coarde .....                                         | 95         |
| 6. Figuri geometrice înscrise în cerc .....                                            | 96         |
| 7. Poligoane regulate .....                                                            | 98         |
| 8. Lungimi și arii întâlnite în cerc .....                                             | 99         |
| <b>VI. Unghiul a două drepte în plan și spațiu .....</b>                               | <b>101</b> |
| <b>VII. Perpendicularitate în plan și spațiu .....</b>                                 | <b>104</b> |
| 1. Noțiuni generale .....                                                              | 104        |
| 2. Teoreme relative la perpendicularitate .....                                        | 104        |

|                                                           |            |
|-----------------------------------------------------------|------------|
| 3. Proiecții de puncte, segmente și drepte .....          | 105        |
| 4. Unghi diedru; unghi plan diedru .....                  | 108        |
| 5. Teorema celor trei perpendiculare .....                | 109        |
| <b>VIII. Prisma</b> .....                                 | <b>111</b> |
| 1. Noțiuni generale .....                                 | 111        |
| 2. Prisma dreaptă .....                                   | 111        |
| <b>IX. Piramida</b> .....                                 | <b>114</b> |
| 1. Noțiuni generale .....                                 | 114        |
| 2. Piramida regulată .....                                | 114        |
| <b>X. Trunchiul de piramidă regulată</b> .....            | <b>117</b> |
| 1. Aria și volumul trunchiului de piramidă regulată ..... | 117        |
| 2. Cazuri particulare de trunchiuri .....                 | 118        |
| <b>XI. Ariile și volumele corpurilor rotunde</b> .....    | <b>120</b> |
| 1. Cilindrul circular drept .....                         | 120        |
| 2. Conul circular drept .....                             | 120        |
| 3. Trunchiul de con circular drept .....                  | 121        |
| 4. Sfera .....                                            | 121        |
| <b>XII. Unități de măsură</b> .....                       | <b>122</b> |
| 1. Unități de măsură pentru lungime .....                 | 122        |
| 2. Unități de măsură pentru arie .....                    | 122        |
| 3. Unități de măsură pentru volum .....                   | 123        |
| 4. Unități de măsură pentru masă .....                    | 124        |
| 5. Unități de măsură pentru timp .....                    | 124        |



## ALGEBRĂ

### Capitolul I

## Mulțimea numerelor naturale

Simbolurile 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 se numesc **cifre**.

Numerale scrise astfel 0, 1, 2, ..., 9, 10, 11, .... formează **șirul numerelor naturale**.

*Observație.* Șirul numerelor naturale este infinit.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  – mulțimea numerelor naturale.

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

*Numerale naturale* sunt:

- **pare** – se împart exact la 2, se notează  $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ ;
- **impare** – nu se împart exact la 2, se notează  $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$ .

## 1. Operații cu numere naturale

### 1.1. Adunarea

termen + termen = sumă

*Proprietățile adunării numerelor naturale:*

- Comutativitatea:  $a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{N}$ .
- Asociativitatea:  $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$ .
- Elementul neutru:  $a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in \mathbb{N}$ . (Numărul natural 0 este element neutru față de adunare.)

### 1.2. Scăderea

descăzut – scăzător = diferență

$a - b = c, \forall a, b \in \mathbb{N}, a \geq b$ .

*Proba scăderii:*  $a = b + c$ .

## 1.3. Înmulțirea

deînmulțit · înmulțitor = produs

*Notăție:* În loc de semnul „ $\cdot$ ” care simbolizează înmulțirea se folosește și „ $\times$ ”.

**Proprietățile înmulțirii numerelor naturale:**

- a) Comutativitatea:  $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in \mathbb{N}$ .  
 b) Asociativitatea:  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall a, b, c \in \mathbb{N}$ .  
 c) Elementul neutru:  $a \cdot 1 = a, \forall a \in \mathbb{N}$ . (Numărul natural 1 este element neutru față de înmulțire.)  
 d)  $a \cdot 0 = 0, \forall a \in \mathbb{N}$ .  
 e) Distributivitatea înmulțirii față de adunare:  
 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$ .  
 f) Distributivitatea înmulțirii față de scădere:  
 $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c, \forall a, b, c \in \mathbb{N}, b > c$ .

## 1.4. Împărțirea

deîmpărțit : împărțitor = cât

$$a : b = c, \forall a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0.$$

$$\text{Proba împărțirii: } a = b \cdot c.$$

$$\text{Observație: } 0 : b = 0, \forall b \in \mathbb{N}, b \neq 0.$$

**Teorema împărțirii cu rest**

Oricare ar fi numerele naturale  $a$  și  $b, b \neq 0$ , numite **deîmpărțit** și, respectiv, **împărțitor**, există două numere naturale  $q$  și  $r$ , numite **cât** și, respectiv, **rest**, astfel încât

$$a = b \cdot q + r, r < b.$$

Numerele  $q$  și  $r$ , determinate în aceste condiții, sunt *unice*.

## 2. Compararea și ordonarea numerelor naturale

Pentru orice două numere naturale  $a$  și  $b$  există una și numai una dintre următoarele relații:

$$a < b \quad a \text{ mai mic decât } b$$

sau

$$a = b \quad a \text{ egal cu } b$$

sau

$$a > b \quad a \text{ mai mare decât } b$$

Pentru orice  $a, b \in \mathbb{N}$  avem următoarele relații:

- $a \leq b$  dacă și numai dacă  $a < b$  și  $a = b$ ;
- $a \geq b$  dacă și numai dacă  $a > b$  și  $a = b$ .

Egalitatea și inegalitatea numerelor naturale au proprietatea de *tranzitivitate*:

- Dacă  $a < b$  și  $b < c$ , atunci  $a < c, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$ .
- Dacă  $a \leq b$  și  $b \leq c$ , atunci  $a \leq c, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$ .
- Dacă  $a > b$  și  $b > c$ , atunci  $a > c, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$ .
- Dacă  $a \geq b$  și  $b \geq c$ , atunci  $a \geq c, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$ .
- Dacă  $a = b$  și  $b = c$ , atunci  $a = c, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$ .

Relațiile  $<, \leq, >, \geq$  sunt *relații de ordine și ordonează numerele naturale*.

## 3. Factor comun

Pentru orice numere naturale  $a, b$  și  $c$  avem:

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c) \text{ și}$$

$$a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c), \text{ cu } b > c.$$

## 4. Puterea unui număr natural

### Definiții:

◆ Se numește **puterea a  $n$ -a a numărului natural  $a$**  numărului  $a^n$  dat prin  $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ ori}}, n \geq 2, a, n \in \mathbb{N}$ ,

unde:  $a$  — se numește **baza puterii**;

$n$  — se numește **exponentul puterii**.

◆ Operația matematică prin care se obține puterea unui număr se numește **ridicare la putere**.

### 4.1. Reguli de calcul cu puteri

Pentru orice  $a \in \mathbb{N}$  și orice  $m, n \in \mathbb{N}$  avem:

$$1. a^1 = a, \forall a \in \mathbb{N}^*;$$

$$2. a^0 = 1, \forall a \in \mathbb{N}^*;$$

$$3. a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \forall a \in \mathbb{N}^*;$$

$$4. a^m : a^n = a^{m-n}, \forall a \in \mathbb{N}^*, m \geq n;$$

$$5. (a^m)^n = a^{m \cdot n}, \forall a \in \mathbb{N}^*;$$

$$6. (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \forall a, b \in \mathbb{N}^*;$$

$$7. (a : b)^n = a^n : b^n, \forall a, b \in \mathbb{N}^*;$$

$$8. a^n = \frac{1}{a^{-n}}, \forall a \in \mathbb{N}^*.$$

*Observație:*  $0^0$  nu se poate efectua.

**Definiție:** Puterea a doua a unui număr natural se mai numește și **pătratul** acelui număr.

### 4.2. Compararea puterilor

◆ Dintre două puteri care au aceeași bază, este mai mare puterea care are exponentul mai mare.

$$a^n > a^m \Leftrightarrow n > m, \forall a \in \mathbb{N}^*, n, m \in \mathbb{N}.$$

◆ Două puteri care au aceeași bază sunt egale dacă au exponenți egali.

$$a^n = a^m \Leftrightarrow n = m, \forall a \in \mathbb{N}^*, n, m \in \mathbb{N}.$$

◆ Dintre două puteri cu baze diferite, dar având același exponent (diferit de zero), este mai mare puterea care are baza mai mare.

$$a^n < b^n \Leftrightarrow a < b, \forall a, b \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^*.$$

## 5. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor

Dacă într-o expresie există paranteze rotunde, drepte și acolade, începem cu efectuarea calculelor din parantezele rotunde. După efectuarea acestor calcule, parantezele drepte le transformăm în paranteze rotunde, iar acoladele în paranteze drepte și continuăm efectuarea calculelor din noile paranteze rotunde.

În funcție de ordinea în care se execută, celor cinci operații matematice cunoscute pentru numerele naturale — adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea și ridicarea la putere — li s-a alocat un **ordin**.

| Operații                 | Ordin |
|--------------------------|-------|
| Adunarea și scăderea     | I     |
| Înmulțirea și împărțirea | II    |
| Ridicarea la putere      | III   |

Dacă un exercițiu conține operații de ordine diferite, se efectuează mai întâi operațiile de ordinul III, apoi cele de ordinul II și, în final, cele de ordinul I.



## 6. Descompunerea numerelor naturale (în baza 10)

$$\overline{ab} = a \cdot 10^1 + b \cdot 10^0$$

$$\overline{abc} = a \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + c \cdot 10^0$$

$$\overline{abcd} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10^1 + d \cdot 10^0$$

unde  $a, b, c, d$  sunt cifre,  $a \neq 0$ .

**Observație:** Orice număr natural se poate descompune după modelul de mai sus.

## 7. Divizibilitatea

### 7.1. Noțiuni generale

**Definiție:** Un număr natural  $a$  este **divizibil** cu  $b$ , dacă există un număr natural  $c$  astfel încât  $a = b \cdot c$ . Numărul  $a$  se numește **multiplu** de  $b$ , iar  $b$  se numește **divizor** al lui  $a$ .

| Notatie: | Se citește:          |
|----------|----------------------|
| $a : b$  | $a$ se divide cu $b$ |
| sau      |                      |
| $b   a$  | $b$ îl divide pe $a$ |

#### Proprietățile divizibilității:

1. Reflexivitatea:  $a : a, \forall a \in \mathbb{N}$ .
2. Antisimetria: dacă  $a : b$  și  $b : a$ , atunci  $a = b, \forall a, b \in \mathbb{N}$ .
3. Tranzitivitatea: dacă  $a : b$  și  $b : c$ , atunci  $a : c, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$ .
4.  $a : 1, \forall a \in \mathbb{N}$ .
5.  $0 : a, \forall a \in \mathbb{N}$ .
6. Dacă  $a : b$  și  $c : b$ , atunci  $(a \pm c) : b, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$ .
7. Dacă  $a : b$ , atunci  $(a \cdot c) : b, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$ .
8. Dacă  $a : b$  și  $a : c$ , atunci  $a : (b \cdot c), \forall a, b, c \in \mathbb{N}$ .

### 7.2. Criterii de divizibilitate

✧ Un număr natural este divizibil cu 2, dacă și numai dacă ultima cifră a numărului este o cifră pară: 0, 2, 4, 6 și 8.

✧ Un număr natural este divizibil cu 5, dacă și numai dacă ultima cifră a numărului este 0 sau 5.

✧ Un număr natural este divizibil cu 10, dacă și numai dacă ultima cifră este 0.

✧ Un număr natural este divizibil cu 3 (sau 9), dacă și numai dacă suma cifrelor numărului este multiplu de 3 (sau 9).

### 7.3. Numere prime și numere compuse

#### Definiții:

✧ Spunem că un număr este **prim** dacă are ca divizori pe 1 și pe el însuși.

✧ Un număr care are mai mult de doi divizori se numește **număr compus**.

#### Cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.)

**Definiție:** Spunem că  $d$  este **cel mai mare divizor comun** a două numere naturale  $a$  și  $b$  dacă:

- a)  $d | a$ ;
- b)  $d | b$ ;
- c) orice alt divizor comun  $d'$  al acelor numere este divizor și pentru  $d$ .

Notatie:  $d = \text{c.m.m.d.c.}(a, b) \stackrel{\text{not}}{=} (a, b)$ .

**Observație:** C.m.m.d.c. se află astfel:

**I.** Se descompun numerele  $a$  și  $b$  în produs de factori primi.

**II.** Se înmulțesc factorii primi comuni, scriși o singură dată, la puterile cele mai mici.



Exemplu: Calculăm  $(300, 225)$ .

$$\begin{array}{r|l} \text{I. } 300 & 2^2 \cdot 5^2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 225 & 5^2 \\ 9 & 3^2 \\ 1 & 1 \end{array}$$

Respect pentru oameni și cărți

$$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

$$225 = 3^2 \cdot 5^2$$

II.  $(300, 225) = 5^2 \cdot 3 = 75$ .

**Definiție:** Două numere se numesc prime între ele dacă cel mai mare divizor comun al lor este 1.

### Cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.)

**Definiție:** Spunem că  $m$  este cel mai mic multiplu comun a două numere naturale  $a$  și  $b$  dacă:

a)  $a \mid m$ ;

b)  $b \mid m$ ;

c) orice alt multiplu comun nenul  $m'$  al acelor numere este multiplu al lui  $m$ .

Notăție:  $m = \text{c.m.m.m.c.}(a, b) = [a, b]$ .

Observație: C.m.m.m.c se află astfel:

I. Se descompun numerele  $a$  și  $b$  în produs de factori primi.

II. Se înmulțesc factorii primi comuni și necomuni, scriși o singură dată, la puterile cele mai mari.

Exemplu: Calculăm  $[320, 165]$ .

$$\begin{array}{r|l} \text{I. } 320 & 2 \cdot 5 \\ 32 & 2^5 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 165 & 11 \\ 15 & 3 \cdot 5 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$320 = 2^6 \cdot 5$$

$$165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$$

II.  $[320, 165] = 2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 10 \cdot 560$ .

## Capitolul II Propoziții și mulțimi

### 1. Propoziții

**Definiție:** O propoziție este un enunț care este ori fals ori adevărat.

#### 1.1. Valoarea de adevăr a unei propoziții

Dacă o propoziție este adevărată spunem că ea are valoarea de adevăr „adevărul” și o notăm cu  $A$ ; dacă o propoziție este falsă spunem că are valoare de adevăr „falsul” și o notăm cu  $F$ .

#### 1.2. Propoziții compuse

Dacă  $p$  și  $q$  sunt două propoziții, atunci putem obține următoarele propoziții compuse:

$$p \text{ și } q, p \text{ sau } q, \neg p.$$

##### 1. $p$ și $q$

Propoziția  $p$  și  $q$  este adevărată când propozițiile  $p$  și  $q$  sunt adevărate.

| $p$ | $q$ | $p \text{ și } q$ |
|-----|-----|-------------------|
| A   | A   | A                 |
| A   | F   | F                 |
| F   | A   | F                 |
| F   | F   | F                 |

##### 2. $p$ sau $q$

Propoziția  $p$  sau  $q$  este adevărată dacă cel puțin una dintre propozițiile  $p$  sau  $q$  este adevărată.

| $p$ | $q$ | $p \text{ sau } q$ |
|-----|-----|--------------------|
| A   | A   | A                  |
| A   | F   | A                  |
| F   | A   | A                  |
| F   | F   | F                  |

##### 3. $\neg p$ (se citește non $p$ )

Propoziția  $\neg p$  este falsă atunci când  $p$  este adevărată și adevărată atunci când  $p$  este falsă.

| $p$ | $\neg p$ |
|-----|----------|
| A   | F        |
| F   | A        |